



שאלה של הפשטה

טימותי גוורס: "מתמטיקה", ידיעות אחרונות - ספרי חמד, 2007, תרגום מאנגלית: דן דראי, 162 עמודים, מחיר מומלץ: 88 שקלים

בלשון נגישה, בבהירות מזהירה ובלא תעלולים מיותרים – במעין יובש בריטי חינוכי – רעיונות בסיסיים של ראיית העולם המתמטית, רוח המחקר בדיסציפלינה ואף כמה מנושאייה המרכזיים.

הספר מחולק לשמונה פרקים: שני הפרקים הראשונים מסבירים מהי הפשטה בכלל ומהי הפשטה מתמטית בפרט. מבחינת גוורס, המטרה העיקרית של הספר היא הבהרת השאלה הזאת, והוא טורח להדגיש שעל-ידי אימוץ הגישה המופשטת הנכונה, נעלמות תהיות פילוסופיות רבות הקשורות בתחום ידע זה ובמושאו. כמו בכל נושא אחר הקשור במתמטיקה, דרושה מידה רבה של תרגול הרעיונות שגוורס מציג כאן בפנינו כדי להפנים באופן ממשי את משמעותם העמוקה, אך גם הלא-מתמטיקאים שבין הקוראים יצליחו לקבל מעט מטעמים הודות להסבריו מאירי העיניים של גוורס. הפרק השמיני עונה על אוסף מקרי למדי של שאלות כלליות הנוגעות למתמטיקאים ולמקצועם: מדוע יש מעט נשים מתמטיקאיות? מדוע מתמטיקאים מכנים הוכחות מסוימות "יפות"? מה בין מתמטיקאים למוזיקה? ועוד. יתר הפרקים עוסקים בהיבטים שונים של המתמטיקה, ואפשר לקרוא בהם בלא להקפיד על הסדר: הוכחות, גבולות ואינסוף, ממד, גאומטריה, הערכות וקירובים. זו בחירה אחת אפשרית מתוך רבות אחרות שעמדו בפני גוורס. מטבע הדברים, יהיו מי שיחשבו שאפשר היה לבחור אחרת, להוסיף נושאים שלא נכללו ולפסוח על כאלה שנבחרו. זו בחירתו של גוורס, והיא נראית מוצלחת בהחלט לצורך הצגת הדיסציפלינה, במסגרת "מבוא קצר מאוד", בפני מי שאינו מכיר אותה. בפרק הראשון גוורס מסביר את משמעותה הבסיסית של כל הפשטה: לבודד היבטים מהותיים של בעיה

"אנשים לא מרבים להגיד שהם מעולם לא אהבו ביולוגיה או ספרות. כמובן, לא כל אחד מרותק מנושאים אלה, אבל מי שאינו מתעניין בהם נוטה לקבל בהבנה את התלהבותם של אחרים. לעומת זאת מתמטיקה, או תחומים בעלי תוכן מתמטי גבוה כגון פיזיקה, מעוררים, אצל אנשים מסוימים, לא רק אדישות, אלא, כך נדמה, סלידה של ממש" (עמ' 150-151).

כדי להגיע לתובנה כזו לא צריך להיות מתמטיקאי מבריק, זוכה מדליית פילדס ("הנובל של המתמטיקאים") בשנת 2002, כמו טימותי גוורס (Gowers). מאידך גיסא, זכייה במדליית פילדס, או הצטיינות במחקר מתמטי בכלל, אינן כשלעצמן ערובה ליכולת הנדרשת כדי להציג "מבוא נגיש למתמטיקה" לקהל רחב יחסית של לא-מתמטיקאים, מתוך מטרה להקל, ולו במעט, על המצב המוזר, אם כי ידוע, המתואר בציטוט לעיל. כדי להצליח לעשות זאת בפחות מ-160 עמודים נדרש כישרון כתיבה מיוחד במינו וראייה מתמטית נרחבת ומאוזנת.

טימותי גוורס – פרופסור למתמטיקה בקיימברידג', אנגליה – היה בלא ספק מועמד מוצלח ביותר למשימה זו עבור עורכי הסדרה היוקרתית של אוניברסיטת אוקספורד שבמסגרתה הופיע ספר זה, תחת השם המקורי *Mathematics: A very Short Introduction*. גוורס מודיע בהקדמה לספרו, שהוא אינו מניח שקוראיו מצוידים בידע מעבר להשכלה תיכונית (הודעה נפוצה בספרים מהסוג הזה). יחד עם זאת (וזה הרבה פחות נפוץ) הוא מזהיר שהוא כן מניח שיש "מידה של עניין מצד הקורא", והוא אינו מנסה לשדל בעזרת שמות פרקים היתוליים, אנקדוטות או נושאים הנחשבים לפופולריים, כגון תורת הכאוס או משפט גדל. הספר כתוב בהתאם להבטחה: גוורס מסביר



כלשהי בעולם הממשי, ולהתרכז רק בהיבטים מסוימים שלה, שנבחרו בקפידה בהתאם לנושא. הדוגמאות שהוא מביא מראות איך בעיות מתחומים שונים בעולם האמפירי הופכות, בעזרת הפשטה נכונה, לבעיות מתמטיות: התנהגותן של קוביות משחק, תהליכי גידול של אוכלוסיות, התנהגות גזים במכל סגור, פעולת המוח והחשיבה האנושית, צביעת מפות ועוד. הפתיחה הזאת היא, לדעתי, אחד ההיבטים המפתיעים והמרעננים ביותר בספר. זרמים מרכזיים של המתמטיקה במאה ה-20 התאפיינו במגמות הפשטה הולכות וגוברות, ומשום כך ספרים רבים שנכתבו בעשורים האחרונים במטרות דומות לאלו של ספרו של גוורס נהגו להוביל את הקורא ישירות אל תוך עולם הרעיונות המופשטים, בלא כל אזהרה או מוטיבציה ברורה, בדיוק כפי שספרי הלימוד המיועדים למתמטיקאים-שבדרך עשו זאת באותה תקופה.

בהתחשב במספרם המועט של העמודים שעמדו לרשותו, החלטתו של גוורס היא אמיצה ומקורית, ואפשר לראות בה אלמנט יחיד (ונכון) של "שידול" לקורא שאינו מתמטיקאי, ובו-בזמן תזכורת מעניינת וחשובה לקוראיו המתמטיקאים. אפשר גם לראות בה עדות לשינויים מעניינים במגמות המרכזיות של המחקר המתמטי בעשורים האחרונים, מגמות שיש בהן, לפחות באופן חלקי, בחינה מחדשת של המשקל הנכון שיש להעניק להיבטים המופשטים-יותר והמופשטים-פחות של המתמטיקה.

בפרק השני גוורס מתקדם צעד נוסף, ומתאר את הדרך המופשטת המיוחדת שאימצה המתמטיקה, במיוחד לאורך

המאה ה-20. חשוב לו מאוד, לגוורס, להסביר מדוע – על פי הראייה המופשטת הזאת – שאלות על מהותן של "ישויות מתמטיות" הן שאלות חסרות עניין ממשי. גוורס מסביר כיצד ומדוע מתמטיקאי אינו מתעניין במהותו המטפיזית של מספר, למשל, אלא בתפקידו המתמטי, בהתאם לכללי הפעולה המופעלים עליו. לדעתו של גוורס, "אנו חייבים, במקרים מסוימים, לאמץ את הגישה הזאת אם ברצוננו להבין באופן נאות מתמטיקה מתקדמת". הפרקים הבאים בספר מדגימים בצורה יפה, כאמור, את הרעיון הזה בתחומים שונים של הדיסציפלינה.

בסוף הספר גוורס מציע לקוראיו כמה מקורות לקריאה נוספת, ובהם כמה ספרים מעט יותר ארוכים ובעלי תוכן





Mathematics: A" to Mathematics. גורס מכה אותו כאן "Long Introduction", והוא מיועד לחוג מקצועי ומצומצם יותר של קוראים. בניגוד ל"מבוא הקצר", ה"מבוא הארוך" נועד להציג פנורמה רחבה וממצה, בחלקה היסטורית ובחלקה טכנית, של מצב התחום בכללותו בימינו.

הגרסה העברית של הספר הנוכחי מנסה לשמר ולשקף את היוקרה של סדרת המקור שבה הופיע בהוצאת אוקספורד, ומצליחה בכך במידה רבה. ואולם, מצער במיוחד להיווכח שעורכי הסדרה בעברית לא עמדו תמיד ברמת ההקפדה שדורשת יומרה מבורכת זו. טעויות דפוס לא-מעטות בטקסטים המכילים מספרים ונוסחאות הן בעייתיות במיוחד בספר מהסוג הזה, משום שהן עלולות לבלבל את

הקורא (בעיקר הלא-מתמטיקאי) ולגרום לו לחשוב שבכל זאת, ובניגוד לרוח הספר, הטיעונים המוצגים הם מעבר ליכולתו. כך, למשל, בעמ' 76, הביטוי 1.9999... מופיע פעמים אחדות, אך מסיבות טכניות הנובעות ככל הנראה מערבוב אותיות עבריות ומספרים, הנקודות "..." בורחות למקומות לא-רצויים ונוצר בלבול מיותר ("אז למה שווה 2 - 1.9999...?"). טעויות כאלה היו צריכות להיבדק בשלב הקריאה האחרונה של

העורך. דוגמה אחרת מופיעה בעמ' 39 ("2 0 x" במקום "2 x 0"). כמו כן, בתרשים בעמ' 18 הושאר משום מה הטקסט המלווה באנגלית. ■

פרופ' ליאו קורי הוא ראש המכון להיסטוריה ופילוסופיה של המדעים והרעיונות ע"ש כהן, אוניברסיטת תל-אביב. מאמר מפרי עטו על "תולדות רעיון ההוכחה המתמטית" יופיע בקרוב ב-Princeton Companion to Mathematics, בעריכת טימותי גורס ואחרים.

טכני מובהק יותר מזה המצוי בספרו. לדעתי ניתן היה להוסיף לפחות שני ערכים נוספים לרשימתו:

Keith Devlin, *The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible*, W.H. Freeman and Company (2000).

Ian Stewart, *Concepts of Modern Mathematics*, Dover Reprint (1975).

מעבר לכך, גורס מפנה את הקוראים אל אתר האינטרנט שלו (<http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10>). כמו מתמטיקאים אחרים בשנים האחרונות, גורס הפך את האתר שלו למקור לא-אכזב של חומר מתמטי מעניין מסוגים רבים, והקוראים שיפנו אליו ימצאו חומר נוסף והפניות הנוגעות לנושאים יסודיים,

ובעיקר מתקדמים, של המתמטיקה. לא פחות חשוב ומעניין – האתר של גורס, ואתרים אחרים שאליהם הוא מפנה, פותחים צוהר מעניין לעולמה של חשיבה מתמטית בהתהוותה: תדפיסים לקורסים, טיטות למאמרים טכניים או מאמרים כלליים שטרם פורסמו, ועוד. מעניין במיוחד הוא הבלוג שגורס חנך לאחרונה, ובו הוא מעלה רעיונות הנוגעים לנושאים מתמטיים שונים, שאלות של דרכי הוראה וכתובה מתמטית נכונות, ועוד. המגיב העיקרי לגורס, בשלב

זה לפחות, הוא טרי טאו (Tao), גם הוא חתן מדליית פילדס (2006), ודמות מקורית ומסקרנת מאוד בקהילה המתמטית. לא ברור איך לשני האנשים האלה יש זמן פנוי להשתתפות פעילה כל-כך בבלוג, אך מדובר בשיחה ערה ומרתקת מאוד, המאירה באור מעניין חלק מן הנושאים הנידונים בספרו של גורס, לצד נושאים חשובים אחרים.

האתר של גורס מזכיר גם ספר נוסף בעריכתו, ביחד עם שניים מעמיתיו, שיראה אור בקרוב: *Princeton Companion*

$$\leq (M \sum_x \sum_y f(x,y) v(y)) (M \sum_{x'} \sum_{y'} f(x',y') v(y'))$$

$$= M^2 \sum_x \sum_{y,y'} f(x,y) f(x,y') v(y) v(y')$$

$$\leq M^2 N^2 \sum_{y,y'} \sum_x f(x,y) f(x,y') v(y) v(y')$$

$$\leq M^2 N^2 \sum_{y,y'} \sum_x f(x,y) f(x,y')^2$$

$$= M^2 N^2 \sum_{x,x'} \sum_{y,y'} f(x,y) f(x,y') f(x') v(y) v(y')$$

