

סמסטר א', מועד ב', תשע"ד
תאריך הבחינה: 12.09.2014
מספר קורס: 0366-2141

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=30

תהי $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad |(f(x_1) - f(x_2)) - (x_1 - x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

הוכיחו כי האיטרציות

$$x_{n+1} = x_n + y - f(x_n)$$

מתכנסות לכל $x_0, y \in \mathbb{R}^n$ לפתרון x של המשוואה $f(x) = y$.
רמז: הראו כי f רציפה.

שאלה 2

=40

תהינה $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ בינארית, $|a| = 2$, $|b| = 3$, $|c| = 4$. בספרה
 $S = \{x : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ נגדיר פונקציה $f(x) = |x - a| \cdot |x - b| \cdot |x - c|$.
הוכיחו כי כל נקודת קיצון מקומית של f ב- S היא צירוף לינארי של a, b, c .
רמז: מצאו ∇g עבור $g(x) = (f(x))^2$.

שאלה 3

=30

(א) אם סדרה של פונקציות אינטגרביליות בתיבה מתכנסת במידה שווה אז הפונקציה הגבולית היא אינטגרבילית. הוכיחו.

.....

(ב) הטענה לא תמיד נכונה עבור התכנסות נקודתית. הוכיחו ע"י דוגמה נגדית.

.....

(ג) איחוד של סדרה אינסופית של קבוצות מדידות ז'ורדן לא תמיד מדיד ז'ורדן. הוכיחו ע"י דוגמה נגדית.

שאלה 4

=40

(א) הוכיחו כי $\int_a^b \sin^2 nx \, dx \rightarrow \frac{1}{2}(b-a)$ כאשר $n \rightarrow \infty$.
רמז: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

.....

(ב) הוכיחו כי $\int_0^1 f(x) \sin^2 nx \, dx \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \, dx$ כאשר $n \rightarrow \infty$, עבור $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית.
רמז: סנדיץ' וסעיף (א).

.....

(ג) הוכיחו כי $\int_D f(x) \sin^2(n|x|) \, dx \rightarrow \frac{1}{2} \int_D f(x) \, dx$ כאשר $n \rightarrow \infty$, עבור $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית; כאן $D = \{x : |x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
רמז: קואורדינטות קוטביות.
