הסתברות למתמטיקאים - תרגיל בית מס' 1

הערה: הסימון $f(n) \sim g(n)$ מציין כי מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

1. יהי $\Omega = \{0,1\}^n$, כאשר $p(\omega) = 2^{-n}$ לכל $\omega \in \Omega$. נסמן ב $L_2(\Omega)$ את המרחב האוקלידי המכיל את כל הפונקציות (משתנים מקריים) $X : \Omega \to \mathbb{R}$ עם מכפלה פנימית $\langle X, Y\rangle = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) Y(\omega) p(\omega)$. נשים לב כי התוחלת של X נתונה ע"י $\mathbb{E}\{X\} = \langle X, \mathbf{1}\rangle$.
   (א) הוכיחו כי הסימנים האקראיים $X_1, \ldots, X_n$ הם אורתונורמליים.
   הערה: אם $\omega = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$ אזי $X_k(\omega) = 2a_k - 1$.
   (ב) נסמן $S_k = X_1 + \ldots + X_k$. הראו כי $\|S_k\| = \sqrt{\langle S_k, S_k\rangle} = \sqrt{k}$ לכל $k \in \{1, \ldots n\}$.
   (ג) הוכיחו כי לכל $X \in L_2(\Omega)$ ולכל $\epsilon > 0$ מתקיים כי $\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \left(\frac{1}{\epsilon}\|X\|\right)^2$.
   (ד) הוכיחו כי לכל $\epsilon > 0$ מתקיים כי $\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}|S_n| \leq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

2. הוכיחו כי לכל $cn \in \{-n, -n+2, \ldots, n\}$ מתקיים

$$\begin{aligned}\log \mathbb{P}(S_n = cn) &= -\frac{\log n}{2} - \frac{n}{2}\left[(1-c)\log(1-c) + (1+c)\log(1+c)\right] \\ &\quad -\frac{\log\left(1-c^2\right)}{2} + \log 2 - \frac{\log(2\pi)}{2} - \log\beta\left(\frac{n(1-c)}{2}\right) - \log\beta\left(\frac{n(1+c)}{2}\right)\end{aligned}$$

   כאשר $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\beta(n)$ הוא קירוב Stirling ל $n!$ ($\beta(n) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$).

3. נתון הילוך מקרי פשוט $\{S_n\}$ על $\mathbb{Z}$, ו $a \in \mathbb{R}$, $b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. הוכיחו כי (כאשר $n \to \infty$)

$$\mathbb{P}\left(a\sqrt{n} \leq S_n < a\sqrt{n} + 2n^b\right) \sim \frac{2n^b}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

4. הראו כי

$$\mathbb{P}\left(\exists k \in \{0, \ldots, 9\} : S_n \in \left[a\sqrt{kn}, a\sqrt{kn} + 2\right)\right) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1 - e^{-5a^2}}{1 - e^{-a^2/2}}.$$

5. נגדיר $N = \min\left(\left\{k : S_n \in \left[a\sqrt{kn}, a\sqrt{kn} + 2\right)\right\}\right)$. מצאו את הגבול כאשר $n \to \infty$ של ההתפלגות המותנית של N, בהנתן כי $N < \infty$ ($N = \infty$ כאשר לא קיים k כזה).

6. נגדיר את הפונקציה הבאה $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$.
   (א) הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)2^n}.$$

   (ב) הוכיחו כי עבור $x \gg 1$ מתקיים כי

$$\Phi(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}x} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-x^2}}{x^3}\right).$$