הסתברות למתמטיקאים - תרגיל בית מס' 3

הערה: החוק החלש של המספרים הגדולים = WLLN.

1. נניח כי X משתנה מקרי ו $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית בורל. מתי המשתנים X ו $f(X)$ הינן בלתי תלויים? מתי יתכן כי X בלתי תלוי בעצמו?

2. נניח כי X משתנה מקרי ו $\mathbb{E}\{X\}<\infty$ הוכיחו כי לכל $c\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\{|X-c|\}=\int_{-c}^{\infty}\mathbb{P}(X\le -t)\,dt+\int_{c}^{\infty}\mathbb{P}(X\ge t)\,dt.$$

רמז: דרך אפשרית היא להיעזר בזהות:

$$(x-y)^{+}=\max\{x-y,0\}=\int_{y}^{\infty}\mathbb{1}_{\{t\le x\}}\,dt.$$

3. יהי X משתנה מקרי.

(א) נתון כי $\mathbb{P}(X\in(0,10))=1$ ו $\mathbb{P}(X>0.3)<0.1$ מצאו חסם מלעיל ל $\mathbb{E}\{X\}$, מהו החסם הטוב ביותר?

(ב) נתון כי $\mathbb{P}(X\in(0,10))=1$ ו $\mathbb{E}\{X\}<2$, מצאו חסם מלעיל ל $\mathbb{E}\{X^2\}$, האם הוא אופטימלי?

(ג) נתון כי $\mathbb{P}(X\in(0,5))=1$ ו $M_X=3$. מצאו חסמים מלעיל ומלרע לערכים האפשריים של $\mathbb{E}\{X\}$.

4. (אינטגרציה בשיטת מונטה קרלו) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה. יהיו $U_1,U_2\ldots,$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים מתפלגים אחיד בקטע $[0,1]$ ונגדיר

$$I_n=\frac{f(U_1)+\ldots+f(U_n)}{n}.$$

(א) נתון כי $\int_0^1|f(x)|^2\,dx<\infty$. הוכיחו כי $I_n\xrightarrow{P}I=\int_0^1 f(x)\,dx$ ומצאו הערכה ל $\mathbb{P}\left(|I_n-I|>\frac{a}{\sqrt{n}}\right)$.

(ב) נתון כי f,g אינטגרביליות ב $[0,1]$, $\int_0^1|g(x)|^2\,dx<10$ ו $\int_0^1|f-g|\,dx<0.001$. מצאו n כך ש

$$\mathbb{P}(|I_n-I|<0.01)\ge 0.99.$$

5. (גרסאות של ה WLLN) נניח כי $X_1,X_2,\ldots$ משתנים מקריים, כך ש $\mathbb{E}\{X_i\}=0$. הוכיחו כי

$$\frac{S_n}{n}=\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\xrightarrow{P}0$$

בתנאים הבאים:

(א) (Chebyshev) נתון כי $\mathbb{E}\{X_i^2\}=\sigma_i^2$ ו $\mathbb{E}\{X_iX_j\}=0$ לכל $i\ne j$ ובנוסף $\sum_{i=1}^n\sigma_i^2=o(n^2)$.

(ב) (Bernstein) נתון כי $\mathbb{E}\{X_i^2\}=\sigma_i^2\le c$ לכל i, $\mathbb{E}\{X_iX_j\}=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ ו $\rho_{ij}\to 0$ כאשר $|i-j|\to\infty$.

רמז: בשני הסעיפים הוכיחו כי $\mathbb{E}\left\{\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right\}\xrightarrow{n\to\infty}0$.

6. נניח ש $X,X_1,X_2,\ldots$ משתנים מקריים ב"ת וש"ה כך ש $\mathbb{P}(X=j)=\mathbb{P}(X=-j)=\frac{c}{j^2\log j}$ ל $j=3,4,\ldots$, כאשר c הוא קבוע נרמול מתאים. שימו לב כי $\mathbb{E}\{|X|\}=\infty$. הוכיחו כי $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}0$, כאשר $S_n=X_1+\ldots+X_n$ לפי השלבים הבאים:

(א) נסמן $Y_{m,k} = X_k \mathbb{1}_{|X_k| \le m}$ עבור $k = 1, \ldots, m$ ו $T_m = Y_{m,1} + \ldots + Y_{m,m}$. הוכיחו כי $\mathbb{E}\left\{\left|\frac{T_m}{m}\right|^2\right\} \xrightarrow{m\to\infty} 0$ ובפרט $\frac{T_m}{m} \xrightarrow{P} 0$.

(ב) הראו כי $\mathbb{P}(T_m \neq S_m) \le \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(X_k \neq Y_{m,k}) \xrightarrow{m\to\infty} 0$.

(ג) הסיקו כי $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$.

7. (קיום $\mathbb{E}\{X\}$ הוא תנאי הכרחי ל WLLN) משתנה מקרי X עם צפיפות $f(x) = \left[\pi\gamma\left(1 + \left(\frac{x}{\gamma}\right)^2\right)\right]^{-1}$ ($x \in \mathbb{R}$), נקרא מתפלג קושי סימטרי עם מקדם פיזור $\gamma > 0$. נשתמש בסימון: $X \overset{d}{\sim} \text{Cauchy}(0,\gamma)$. בדקו כי $\mathbb{E}\{|X|\} = \infty$.

(א) הראו כי אם $X_1 \overset{d}{\sim} \text{Cauchy}(0,\gamma_1)$ ו $X_2 \overset{d}{\sim} \text{Cauchy}(0,\gamma_2)$ ב"ת אזי $X_1 + X_2 \overset{d}{\sim} \text{Cauchy}(0,\gamma_1+\gamma_2)$.

(ב) הראו שאם $X \overset{d}{\sim} \text{Cauchy}(0,\gamma)$ ו $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ אזי $aX \overset{d}{\sim} \text{Cauchy}(0,a\gamma)$.

(ג) הראו שעבור $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ש"ה ב"ת כך ש $X_1 \overset{d}{\sim} \text{Cauchy}(0,1)$ מתקיים כי לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ ו $\epsilon > 0$ מתקיים כי לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \alpha\right| > \epsilon\right) = c_\epsilon < 1.$$

כלומר WLLN לא נכון עבור משתנים מקריים אלו.

<u>הערה לגבי סעיף א':</u> נראה בהמשך שאם X, Y משתנים מקריים ב"ת עם צפיפויות p_X, p_Y בהתאמה אז $p_{X+Y}(x) = \int p_X(t)\, p_Y(x-t)\, dx$. אפשר לחשב את האינטגרל המתקבל בעזרת פונקציות מרוכבות.