

הסתברות למתמטיקאים - תרגיל בית מס' 8

1. נסמן ב- I את מטריצת היחידה ונניח כי נתון כי $P^n = I$ כאשר P היא מטריצת המעברים של שרשת מרקוב סופית. הוכיחו או הפריכו:

$$P = I \quad (\text{א})$$

(ב) כל המצבים שייכים לאותה מחלקת שקילות (יש מסלול שמחבר ביניהם).

(ג) כל המצבים הם נשנים (recurrent).

(ד) המחזור של כל מצב הוא n .

2. נניח כי U_1, U_2, \dots סדרה של מ"מ ב"ת מפולגים אחיד ב- $\{1, 2, \dots, 10\}$. נסמן $S_k = \sum_{i=1}^k U_i$. נגדיר סדרה X_0, X_1, \dots ע"י $X_n = n - S_k$ עבור $n \in [S_k, S_{k+1})$.

(א) הוכיחו כי (X_0, X_1, \dots) היא שרשת מרקוב על $0, 1, \dots, 9$ המתחילה ב-0. מצאו את מטריצת ההסתברויות של המעברים.

(ב) האם המטריצה שמצאתם היא אי-פריקה? לא מחזורית? האם קיימת מידה סטציונארית? יחידה? אם כן, מצאו אותה. האם ההתפלגות של X_n מתכנסת אליה כאשר $n \rightarrow \infty$?

3. המלה ABRACADABRA משתנה ע"י החלפת שתי אותיות שנבחרות באקראי. המלה החדשה משתנה באותו אופן וממשיכים להחליף אותיות n פעמים. חשבו את הגבול של ההסתברות שהמלה המתקבלת מתחילה ומסתיימת באות A, כאשר $n \rightarrow \infty$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

(א) האות מספר k מתחלפת עם האות מספר l , כאשר הזוג (k, l) נבחר בצורה אחידה מתוך הקבוצה $\{1, 2, \dots, 11\} \times \{1, 2, \dots, 11\}$.

(ב) כמו בא' בתוספת הדרישה כי $k \neq l$.

(ג) כמו בב' בתוספת הדרישה כי האותיות במקומות ה- k ו- l שונות.

4. המספר $S_0 = 123456789$ משתנה בכל שלב ע"י החלפת שתי ספרות שונות הנבחרות בצורה אקראית (36 אפשרויות בהסתברות שווה בכל שלב), כך שמתקבלת סדרת מספרים S_1, S_2, \dots .

(א) מצאו את הגבול (אם קיים) $\lim_n \mathbb{P}(S_n < 222222222)$.

(ב) נניח ש- T_0 הוא זמן החזרה הראשון ל- S_0 . חשבו

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{n=1}^T \mathbb{1}_{(0, 222222222)}(S_n) \right\}$$

5. על שולחן מסודרות שתי חפיסות קלפים, אחת מלאה בצד ימין והשנייה ללא קלפים מסוג לב בצד שמאל. בוחרים חפיסה ע"י הטלת מטבע הוגנת ומוציאים ממנה קלפים לפי הכללים הבאים:

א. אחרי שקלף יצא מהחפיסה הוא מוחזר אליה ומערבבים את החפיסה מחדש.

ב. אם הקלף האחרון שנבחר היה אדום, הקלף הבא יבחר מהחפיסה הימנית ואחרת מהחפיסה השמאלית.

מהו האחוז של הזמן (אסימפטוטית) בו נבחרים קלפים אדומים?