סמסטר א', מועד ב', תש"ע
תאריך הבחינה: 08.08.2010.
מספר קורס: 0366-2115

בחינה בטופולוגיה

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.

בהצלחה!

חלק ראשון

בחרו 2 מתוך 3 השאלות הבאות.

שאלה 1

=25

נתבונן בתכונה הבאה של מרחב מטרי חסום X:
(*) קיימים $x, y \in X$ כך ש–

$$\rho(x,y) = \sup_{u,v \in X} \rho(u,v)\,.$$

הוכחו או הפריכו:

(א). (*) מתקיים לכל X;

(ב). (*) הוא מספיק לקומפקטיות של X;

(ג). (*) הוא הכרחי לקומפקטיות של X.

שאלה 2

=25

נתבונן בתכונות הבאות של קבוצה $X \subset \mathbb{R}^2$:
(*) יש ל– X מספר סופי של רכיבי קשירות;
(**) כל פונקציה רציפה $X \to \mathbb{Z}$ היא חסומה.

(א). הוכחו ש–(*) גורר את (**);

(ב). הפריכו ש–(**) גורר את (*).

שאלה 3

=25

יהי X מרחב טופולוגי, $x \in X$, C רכיב הקשירות של x, ו-A חיתוך של כל הקבוצות הפתוחות-וגם-סגורות שמכילות את x.

(א). הפריכו ש-$C = A$ תמיד;

. . . .

(ב) הוכחו שאם X קומפקטי אז $C = A$.

חלק שני

בחרו 2 מתוך 3 השאלות הבאות.

שאלה 4

=25

תהי $p : X \to B$ העתקה מכסה ו-X קומפקטי. הוכחו שלכל $b \in B$ הקבוצה $p^{-1}(\{b\})$ היא סופית.

שאלה 5

=25

יהי $F = \big([-2,2] \times [0,1]\big) \setminus \big((-1,1) \times (0,1)\big) \subset \mathbb{R}^2$. הוכחו או הפריכו: F הוא רטרקט של $\mathbb{R}^2$.

שאלה 6

=25

יהי $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\, z^2 \le 1\}$ משטח צדי של גליל, ו-$A = B \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\, z^2 = 1\}$ משטח של הגליל (עם הבסיסים).

(א). הוכחו שלכל העתקה רציפה $f : A \to \mathbb{R}^2$ קיים $x \in A$ כך ש- $f(-x) = f(x)$.

. . . .

(ב). הפריכו שלכל העתקה רציפה $g : B \to \mathbb{R}^2$ קיים $x \in B$ כך ש- $g(-x) = g(x)$.
